

Chapter 5

Difference-in-Difference

Pp191-203

1

前回までの復習

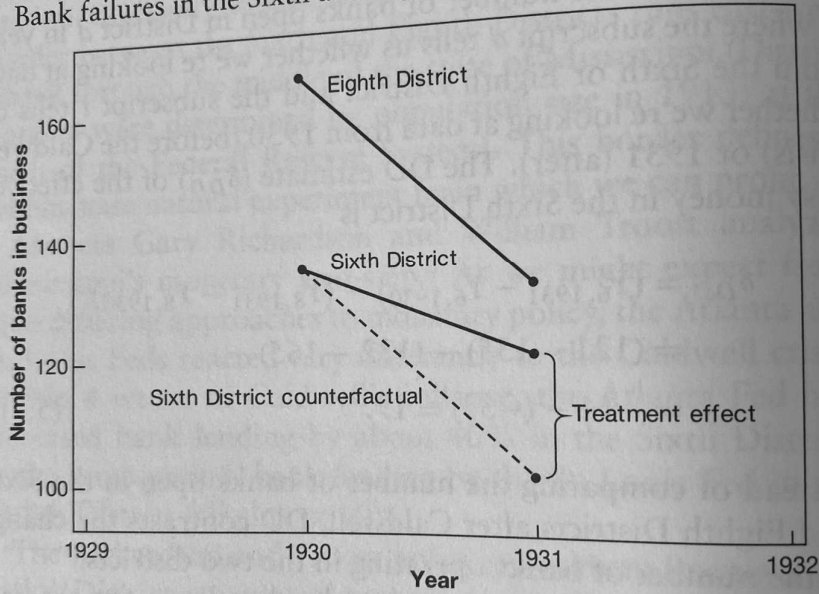
- ・ DIDある時点での制度や政策の違いを加味して、その違いによる効果を推定する方法。

Cf.RDD（不連続回帰デザイン）

（ある要素においての制度や政策の違いを加味して、その違いによる効果を推定する方法。）

2

FIGURE 5.1
Bank failures in the Sixth and Eighth Federal Reserve Districts



二つの隣接した地区での恐慌に対する経済政策の違いを比較し、因果効果を推定。

$$\delta_{DD} = \frac{(Y_{6,1931} - Y_{6,1930})}{\text{介入群での変化}} - \frac{(Y_{8,1931} - Y_{8,1930})}{\text{対照群での変化}}$$

3

仮定

- 平行トレンド仮定

もしも介入がなかった場合、介入群の結果と対照群の結果は平行に推移する。

(前回の例：恐慌が起きたタイミング付近での結果のプロット)

- 実際にはその他の要因を加味して因果推定を行う必要がある。(卸売店の数・売り上げの変動)

4

2群を比較するケース

$$\delta_{DD} = \underbrace{(Y_{A,AT} - Y_{A,BT})}_{\text{介入群におけるYの変化}} - \underbrace{(Y_{B,AT} - Y_{B,BT})}_{\text{対象群におけるYの変化}}$$

介入群におけるYの変化 対象群におけるYの変化

A:介入群 B:対照群 AT:介入後 BT:介入前

回帰式で考えると

$$Y_{dt} = \alpha + \beta TREAT_d + \gamma POST_t + \delta_{rDD} (TREAT_d \times POST_t) + e_{dt}$$

δ_{rDD} は δ_{DD} と同じになる。

5

5.2 Drink ,Drink...

・ 1933年の禁酒法廃止に伴い、州が独自にアルコールを規制することが可能に。

多くの州ではMLDA (a Minimum Legal Drinking Age) を21歳に設定したが、カンザスやニューヨークなどいくつかの州では18歳に設定

・ 1971年に選挙権が18歳に引き下げられたのをきっかけに、多くの州でMLDAが引き下げられる。しかし1984年にNational Minimum Drinking Age 法による制裁が開始されたことをうけ、1988年にはすべての州とコロンビア特別区でMLDAが21歳となる。

6

パッチワークからの組み合わせ

リサーチクエスチョン:

飲酒開始年齢の引き下げが若年層の死亡率にどれだけ影響するか。

アラバマ州とアーカンソー州の比較

アラバマ州：1975年にMLDAを21歳から19歳に引き下げ。

アーカンソー州：禁酒法廃止以来MLDAは21歳のまま

1970年から1983年までの18歳から20歳の死亡率を使用

7



8

定式化

$$Y_{st} = \alpha + \beta TREAT_s + \gamma POST_t + \delta_{rDD}(TREAT_s \times POST_t) + e_{st}$$

$s = \text{Alabama, Arkansas, } t = 1970, 1971, \dots, 1983.$

Y_{st} : 州 s 時間 t における18歳から20歳の死亡率

$TREAT_s = 0$ $s = \text{Arkansas}$, $TREAT_s = 1$ $s = \text{Alabama}$

$POST_t = 0$ $t = 1970, \dots, 1974$, $POST_t = 1$ $t = 1975, \dots, 1983$

$TREAT_s \times POST_t = 1$, if $s = \text{Alabama}$ and $t = 1975 \dots 1983$

9

二つの州だけでなく、MLDAの自然実験はより広い地域でデータの取得が可能 cf.5.1との比較

EX.テネシー州では1971年にMLDAが18歳へ1979年には19歳に変更

2群間の比較ではなく、ほかの州を混ぜてより一般的な因果効果を推定する。

Arkansasは1933年から現在まで常にMLDAが21歳であるため基準として、つまり対照群として用いられる。

10

定式化

$$Y_{st} = \alpha + \delta_{rDD} \text{LEGAL}_{s,t} + \sum_{k=Alaska}^{Wyoming} \beta_k \text{STATE}_{k,s} + \sum_{j=1971}^{1983} \gamma_j \text{YEAR}_{j,t} + e_{st}$$

従来モデル

$$Y_{st} = \alpha + \beta \text{TREAT}_s + \gamma \text{POST}_t + \delta_{rDD} (\text{TREAT}_s \times \text{POST}_t) + e_{st}$$

三つの変更点

- γPOST_t が $\sum_{j=1971}^{1983} \gamma_j \text{YEAR}_{j,t}$ へ
- βTREAT_s が $\sum_{k=Alaska}^{Wyoming} \beta_k \text{STATE}_{k,s}$ へ
- $\text{TREAT}_s \times \text{POST}_t$ が $\text{LEGAL}_{s,t}$ へ

11

$$\gamma \text{POST}_t \text{ が } \sum_{j=1971}^{1983} \gamma_j \text{YEAR}_{j,t} \text{ へ}$$

- $\text{YEAR}_{j,t}$ は $t=j$ のとき、1になる。

例えば、 $t=1980$ のとき、

$$\sum_{j=1971}^{1983} \gamma_j \text{YEAR}_{j,t} = \gamma_{1980}$$

- γ_j は time effect (時間効果) として知られ、全州に共通する。

死亡率に対してある年における効果を表したものの。

(今回のケースでは year effect ともいう)

(多重共線性の問題より $j=1970$ を除外)

12

$\beta TREAT_s$ が $\sum_{k=Alaska}^{Wyoming} \beta_k STATE_{k,s}$ へ

- $STATE_{k,s}$ は $k = s$ のとき、1になる。

例えば、 $s = NY$ のとき、

$\sum_{k=Alaska}^{Wyoming} \beta_k STATE_{k,s} = \beta_{NY}$ となる。

- β_k は州効果 (State Effect) と呼ばれる。

州独自の効果が含まれる。

(多重共線性の問題より、一つ除外される)

13

$TREAT_s \times POST_t$ が $LEGAL_{s,t}$ へ

- $LEGAL_{s,t}$ はダミー変数ではない
- これは州 s 、年 t 時点で18歳から20歳において飲酒可能な人の割合を表したものの。

例えば、Alabama州では1975年の7月からMLDAが19歳に引き下げになった。

したがって $LEGAL_{Alabama,1975}$ はその事実を反映するようにスケージングされる。

14

回帰式

$$Y_{st} = \alpha + \delta_{rDD} \text{LEGAL}_{s,t} + \sum_{k=Alaska}^{Wyoming} \beta_k \text{STATE}_{k,s} + \sum_{j=1971}^{1983} \gamma_j \text{YEAR}_{j,t} + e_{st}$$

今回のケースでは、14年分、51州（コロンビア行政特別区を含む）、計714個のデータを用いる。

このデータ構造を州-年パネルデータという。

β_k は州独自の効果を制御する。例えば地方と都市の違い

γ_j は年独自の効果を制御する。例えば国における飲酒効果のトレンド

$\text{LEGAL}_{s,t}$ の違いが州内における死亡率の違いをとらえる（因果効果）

この因果効果を正しく推定するためにはcommon trends assumptionが必要¹⁵

因果効果 δ_{rDD} の推定結果

TABLE 5.2
Regression DD estimates of MLDA effects on death rates

Dependent variable	(1)	(2)	(3)	(4)
All deaths	10.80 (4.59)	8.47 (5.10)	12.41 (4.60)	9.65 (4.64)
Motor vehicle accidents	7.59 (2.50)	6.64 (2.66)	7.50 (2.27)	6.46 (2.24)
Suicide	.59 (.59)	.47 (.79)	1.49 (.88)	1.26 (.89)
All internal causes	1.33 (1.59)	.08 (1.93)	1.89 (1.78)	1.28 (1.45)
State trends	No	Yes	No	Yes
Weights	No	No	Yes	Yes

前スライドの回帰式による推定結果はコラム(1)

RDDの結果と整合的
(詳しくはChapter4)

すべての死亡と交通事故による死亡の結果が正確である。

病気が原因による死亡への影響が小さい

差の差分分析の仮定を考察する

- ・ 一般的には、比較する二つの群の間では結果変数が同じトレンドを持っている必要がある。
- ・ しかし、今回は各介入群（つまり各州）が持っているトレンドを制御することでこの仮定を緩めることができる。

17

各州のトレンドを考慮したモデル

$$Y_{st} = \alpha + \delta_{rDD} \text{LEGAL}_{st} + \sum_{k=Alaska}^{Wyoming} \beta_k \text{STATE}_{k,s} + \sum_{j=1971}^{1983} \gamma_j \text{YEAR}_{j,t} + \sum_{k=Alaska}^{Wyoming} \theta_k (\text{STATE}_{k,s} \times t) + e_{st}$$

新しく各州のトレンドを制御する項が加えられた。

例えば1980年のNY州なら

$$Y_{NY,1980} = \alpha + \delta_{rDD} \text{LEGAL}_{NY,1980} + \beta_{NY} + \gamma_{1980} + \theta_{NY} \times t + e_{NY,1980}$$

18

- ・このモデルでは、各州が同トレンドを持っていると仮定する代わりに、

処置効果がなければ、各州 k における死亡率は傾き θ_k の線形トレンドにそって変化している。

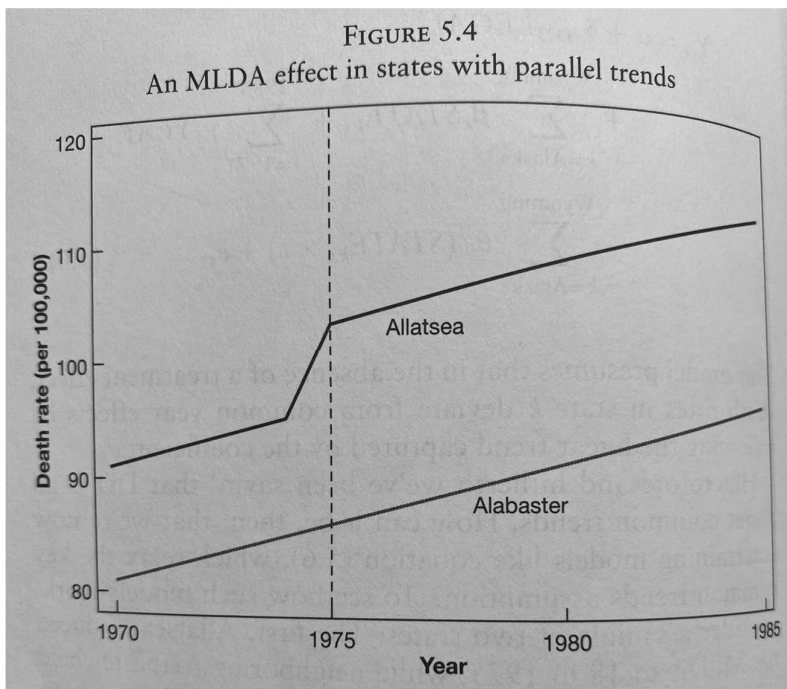
と仮定している。

従来の仮定との違い

- ・簡略化のために二群の比較で考える。

架空の州、AllatseaとAlabasterの二州を考える。
AllatseaではMLDAが1975年に18歳まで引き下げられ、
AlabasterではMLDAが21歳で一定であるとする。

従来の仮定



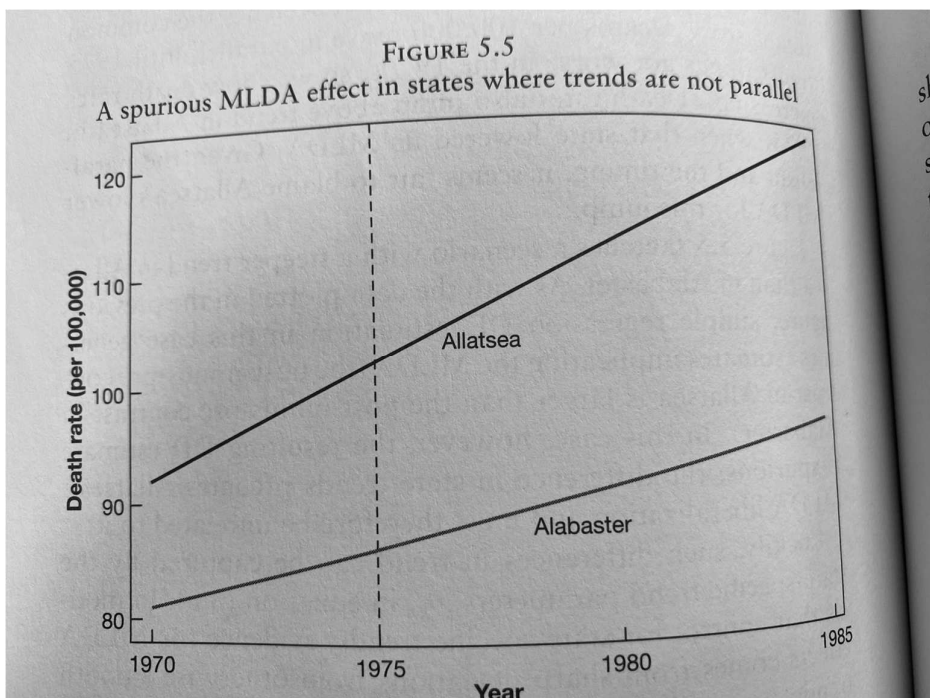
1975年まで、二つの州における死亡率のトレンドは平行。

1975年にAllatsea州でMLDAの引き下げ

1975年の死亡率にジャンプがみられる。

1975年以降もトレンドが平行。

新しい仮定



AllatseaがAlabasterよりも傾きが急な線形トレンドを持っていると仮定。

差の差分析で、通常の方法で因果効果を分析するとこのケースではバイアスが含まれた推定量が導出される。

例えば、

Allatsea州が傾き 3 の線形トレンド、

Alabaster州が傾き 2 の線形トレンドをもっていると考
える。

因果効果が存在していなくても差の差分分析をつかって
推定すると

$$\delta_{rDD} = 1$$

となる。

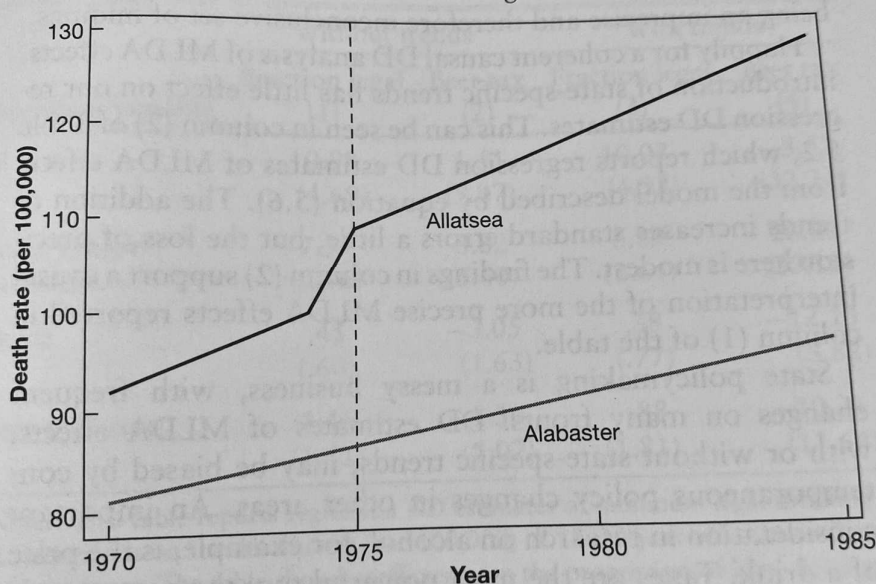
(仮定が満たされてないためにバイアスが生じる。)

23

これらの線形トレンドの違い $\theta_k t$ は、
回帰式に含めることである程度制御できる。

FIGURE 5.6

A real MLDA effect, visible even though trends are not parallel



異なった線形トレンドの
もとで政策変更による因
果効果をAllatsea州に加
えたもの。

線形トレンドの違い $\theta_k t$
は回帰式によって制御さ
れるため、因果効果は
 δ_{rDD} として導出される。

24

各州が線形トレンドをもつという仮定の下では、
 回帰式に線形トレンドの制御を入れることで因果
 効果を導出できる。

しかし、実際はそこまで単純ではない。

因果効果が小さくジャンプが明確でない場合には、
 線形トレンドと因果効果を区別するのが難しくな
 る。

TABLE 5.2
 Regression DD estimates of MLDA effects on death rates

Dependent variable	(1)	(2)	(3)	(4)
All deaths	10.80 (4.59)	8.47 (5.10)	12.41 (4.60)	9.65 (4.64)
Motor vehicle accidents	7.59 (2.50)	6.64 (2.66)	7.50 (2.27)	6.46 (2.24)
Suicide	.59 (.59)	.47 (.79)	1.49 (.88)	1.26 (.89)
All internal causes	1.33 (1.59)	.08 (1.93)	1.89 (1.78)	1.28 (1.45)
State trends	No	Yes	No	Yes
Weights	No	No	Yes	Yes

先ほどのモデルに
 線形トレンドの項を
 加えた回帰式の結果が
 Column(2)

精度は下がっている
 (標準誤差は上がって
 いる) がColumn(1)の
 因果解釈を助けている。

価格の考慮

- ・これまでの推定結果は各地域特有のまだ考慮されていない要素によって生じるバイアスを含んでいる可能性がある。
- ・もっとも重要な要素は価格である。とりわけ政府はビールへの課税によって価格への影響力を持つ。
- ・この酒税は含有アルコール量に基づいて各州で決められているが税率はバラバラで時系列によって変化する。
- ・もし各州が税率を減らすことで、州民の飲酒量を制限しようとするのであれば価格変化も回帰式で制御する対象になりうる。

TABLE 5.3
Regression DD estimates of MLDA effects controlling for beer taxes

Dependent variable	Without trends		With trends	
	Fraction legal (1)	Beer tax (2)	Fraction legal (3)	Beer tax (4)
All deaths	10.98 (4.69)	1.51 (9.07)	10.03 (4.92)	-5.52 (32.24)
Motor vehicle accidents	7.59 (2.56)	3.82 (5.40)	6.89 (2.66)	26.88 (20.12)
Suicide	.45 (.60)	-3.05 (1.63)	.38 (.77)	-12.13 (8.82)
Internal causes	1.46 (1.61)	-1.36 (3.07)	.88 (1.81)	-10.31 (11.64)

左側の結果は線形トレンドを含まず酒税の項を含んだ回帰式での係数の推定結果。

右側はトレンドを含む。

考察

- ・ 酒税の変化を制御しても、あまり係数の推定値が変わることはない。加えてどちらも結果は有意である。
- ・ 酒税の18歳から20歳における死亡率への影響は、推定結果の精度が低い。
酒税の変化頻度が少ないためか？
- ・ 酒税の死亡率への影響は有意でない。

29

各州の違いを考慮

$$\begin{aligned} \cdot Y_{st} = & \alpha + \delta_{rDD} \text{LEGAL}_{s,t} \\ & + \sum_{k=\text{Alaska}}^{\text{Wyoming}} \beta_k \text{STATE}_{k,s} + \sum_{j=1971}^{1983} \gamma_j \text{YEAR}_{j,t} + e_{st} \end{aligned}$$

この式では観測値すべてが同じように扱われているが実際は州の性質が異なるので観測値は同様に扱いは不自然。

30

人口の差異の考慮

- ・他に考えられる違いといえば人口。

例えばテキサス・カリフォルニアは多くの国よりも多い人口を誇る。一方でヴァーモントやワイオミングでは人口が少ない。

- ・この違いを人口の多い州では多くの“重み”をつけることで調整する。
- ・この推定法をWLS(Weighting Least Squares)という。

31

WLS(Weighting Least Squares)

通常のOLS

- ・残差二乗和はどの推定値でも同じ重さであるとみなす。

$$SSR = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2$$

WLS

- ・残差の二乗に重みをつけて足し合わせる。

$$SSR_w = \sum_{i=1}^n W_i \varepsilon_i^2$$

W_i :各データの種類に対する重み

- ・ SSR_w を最小化するような推定値がWLS推定値となる。

32

人口の違いによる重みづけの二つの結果

一つ目

- ・ OLSが推定する平均処置効果はデータがとられたグループに対する加重平均である。

今回は、各州に対する加重平均。

- ・ OLSの場合は重みづけが同じ。人口の違いによる重み（影響度）を無視している。

- ・ WLSは人口の違いによる重み（影響度）を考慮

33

- ・ 人口の違いによる重みづけはうまく働くように見えるが、重みづけする必要性はあまりない。

- ・ なぜなら人口の違いに関係なくMLDAの変化は同質に死亡率へ影響しそうだから。

例：Vermont州におけるMLDAの変化はTexas州におけるMLDAの変化と同様に役立ちそう。

- ・ したがって重みづけによる推定値の変化小さいものであることが期待される。

34

二つ目

- ・重みづけをすることによって制度の高い推定値を得ることができる。
- ・例：人口の少ない州における死亡率は年によって変化しやすい。
- ・したがって人口の多い州のデータのほうが標本分散が小さく信頼性が高いのでより大きな重みをつけることの理由付けとなる。

35

- ・実際問題として重みづけの議論は単純明快ではない。
- ・理論的にはWLSは（不均一分散を緩和する意味で）OLSより効率的な（より正確な）推定値を得られる。
- ・ただ重みづけが不正確であるとOLSより不正確な推定値になってしまう。
- ・一番良いシナリオは重みが推定値に与える影響が少ないということ。

36

TABLE 5.2
Regression DD estimates of MLDA effects on death rates

Dependent variable	(1)	(2)	(3)	(4)
All deaths	10.80 (4.59)	8.47 (5.10)	12.41 (4.60)	9.65 (4.64)
Motor vehicle accidents	7.59 (2.50)	6.64 (2.66)	7.50 (2.27)	6.46 (2.24)
Suicide	.59 (.59)	.47 (.79)	1.49 (.88)	1.26 (.89)
All internal causes	1.33 (1.59)	.08 (1.93)	1.89 (1.78)	1.28 (1.45)
State trends	No	Yes	No	Yes
Weights	No	No	Yes	Yes

Column(3)は各州のトレンドは考慮せず重みづけ

Column(4)は各州のトレンドは考慮し、重みづけ

重みづけによる影響はそれほどなさそう。

すべての死のケースにおいて因果効果は有意である。

まとめ

- ・ パネルデータを用いて複数のグループにおける短期的な因果効果の分析が可能。

- ・ 線形トレンドを各州が持っていると仮定すれば、その項を回帰式に含めることで因果効果が推定可能
(共通トレンドの仮定を緩められる)

- ・ ただし、各州の違いによる要素を十分に考慮しなければ因果効果を正しく推定することはできない。

参考文献

・ Angrist, J.D. and J.Pischke [2015] Mastering ‘Metrics: Princeton

・ 伊藤公一朗[2017] 『データ分析の力 因果関係に迫る思考法』第5章 光文社